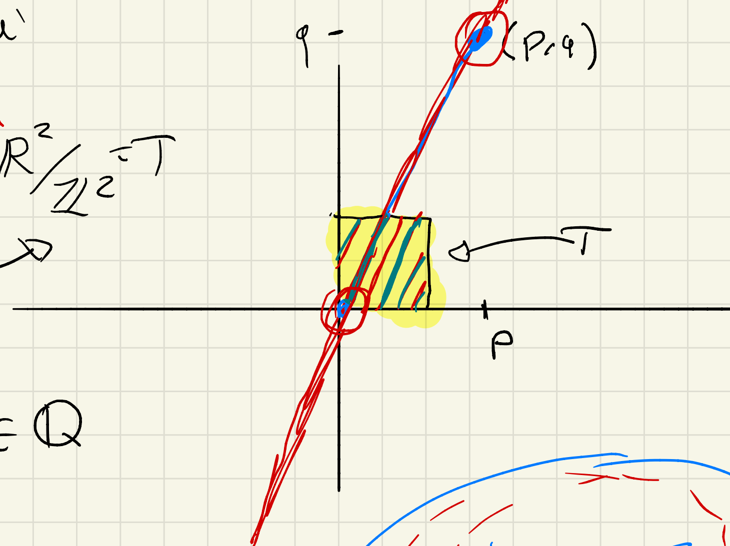
$f: M \to N$ embedding se è immersione $(\forall p \in M)$ e anche omeom su immagine

$f(M) \subseteq N$ è una sottovarietà

$v \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "F"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T \end{tikzcd}$$

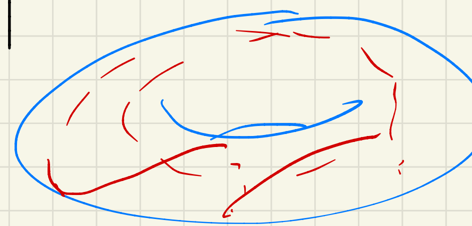
$t \mapsto t \cdot v$



Se $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad y/x = p/q \in \mathbb{Q}$

non è iniettiva

L'immagine è comunque una sottovarietà $\cong S^1$



Se $y/x \notin \mathbb{Q}$ $\quad$ F è iniettiva + immersione

Ex: Im F è densa nel toro (non è sottovarietà)

IMMAGINE DI EMBEDDING È SOTTOVARIETÀ

CONTRO-IMMAGINE DI VALORI REGOLARI È " "

Ex $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$ $\quad$ 1 è regolare $\Rightarrow$ $f^{-1}(1) = S^{n-1}$ è sottovarietà

PARTIZIONE DELL'UNITÀ

Def: X sp. top. è PARACOMPATTO se

$\forall \{U_i\}$ ricoprimento aperto di X $\exists$ raffinamento $\{W_j\}$ (ricopr. ap.) localmente finito

$W_j \subseteq U_{i_j}$

Ogni $K \subseteq X$ ne interseca un numero finito

Prop: M varietà $\Rightarrow$ M paracompatta

Def: M varietà. Una ESAUSTIONE DI COMPATTI è successione $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_i \subseteq \dots$

con $K_i \subseteq \operatorname{int} K_{i+1} = \mathring{K}_{i+1}$ $\quad$ K_i $\forall i \in \mathbb{N}$

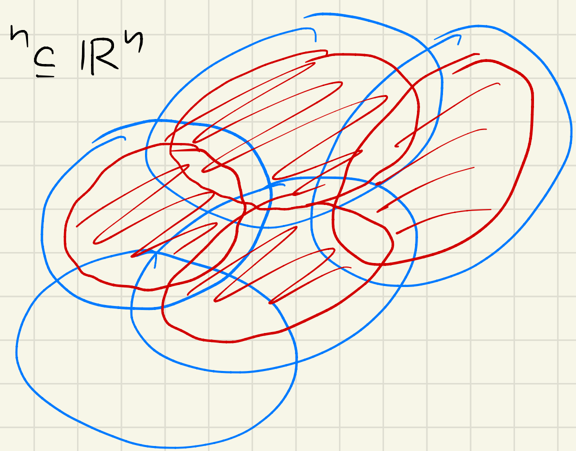
$\bigcup K_i = M$

Ex: M varietà $\Rightarrow \exists$ esaustione di cpt

Def: Un atlante $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}$ di M è ADEGUATO se

1) $\{U_i\}$ ricopr. loc. finito

2) $\{\varphi_i^{-1}(B^n)\}$ ricoprono M $\qquad B^n \subseteq \mathbb{R}^n$



Prop: $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di M

$\Rightarrow \exists \{\varphi_k : W_k \to \mathbb{R}^n\}$ adeguato t.c. $\{W_k\}$ raffina $\{U_i\}$.

dim:

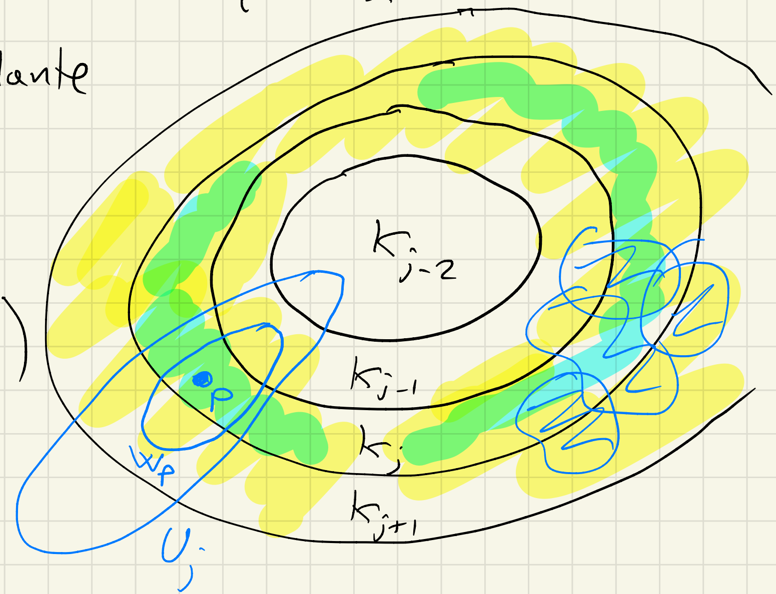
M esaustione $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_i \subseteq \dots$

Costruiro induttivamente su $j \geq 1$ l'atlante

$K_{-1} = K_0 = \emptyset$

$\forall p \in \mathring{K}_{j+1} \setminus K_{j-2} \quad \varphi_p : W_p \to \mathbb{R}^n$

$W_p \subseteq U_i \cap (\mathring{K}_{j+1} \setminus K_{j-2})$



$\{\varphi_p^{-1}(B^n)\}$ un numero finito di queste ricoprono $K_j \setminus \mathring{K}_{j-1}$

scelgo solo queste $\to$ ottengo atlante adeguato $\square$

Def: M varietà, $\{U_i\}$ ricopr. aperto di M $\qquad i \in I$

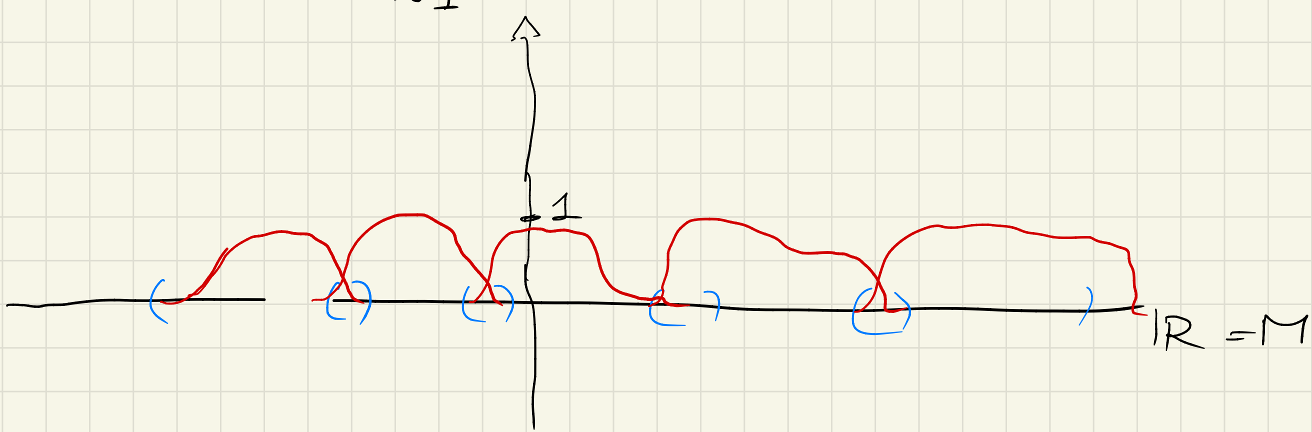
Una PARTIZIONE DELL'UNITÀ subordinata al ricoprimento

è $\{\rho_i : M \longrightarrow \mathbb{R}\}$ LISCE $\qquad \rho_i$ è a valori in $[0,1]$

1) $\operatorname{supp} \rho_i \subseteq U_i$

2) ogni $x \in M$ ha $U(x)$ su cui $\rho_i|_U \equiv 0$ per quasi tutti gli i

e $\forall x \qquad \sum_{i \in I} \rho_i(x) = 1$



Prop: $\{U_i\}$ ricoprimento aperto $\Rightarrow$ $\exists$ sempre partiz. dell'1 subordinate

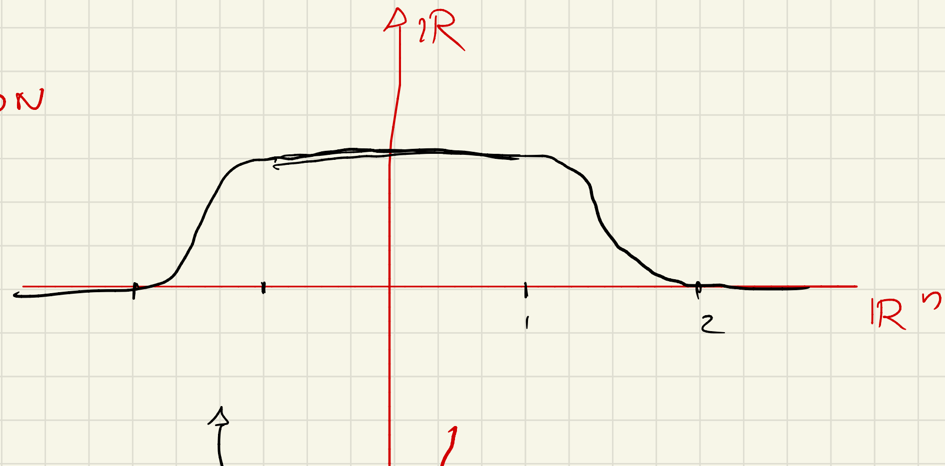
dim

λ BUMP FUNCTION

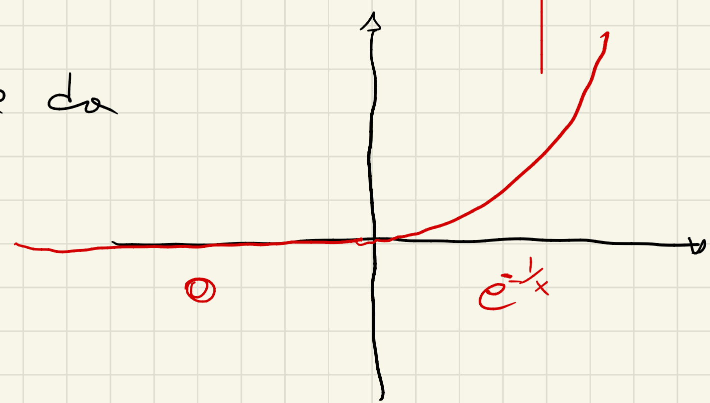
$\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ LISCIA

$\lambda(x) = 1$ se $\|x\| \leq 1$

$\lambda(x) = 0$ se $\|x\| \geq 2$



Sono generate da



$\{U_i\}$ ric. aperto $\rightsquigarrow$ $\{\varphi_i : W_j \to \mathbb{R}^n\}$ atlante adeguato che raffina

$\forall j \quad \bar{\rho}_j : M \to \mathbb{R}$ $\quad \bar{\rho}_j(x)$ $\to$ se $x \in W_j$ $\quad \bar{\rho}_j(x) = \lambda(\varphi_j(x))$; $\to$ 0 altrimenti

$\{\bar{\rho}_j : M \to \mathbb{R}\}$

$\forall x \in M \quad \overline{U(x)}$ cpt

solo un $\# < \infty$ di j sono tali che

$\bar{\rho}_j|_{\bar{U}(x)} \not\equiv 0$ perché W_j è loc. finito

Ha senso

$\bar{\rho} : M \to \mathbb{R}$

$\bar{\rho}(x) = \sum_j \bar{\rho}_j(x) \geq 1$ ha senso, è liscia

$\rho_j(x) = \dfrac{\bar{\rho}_j(x)}{\bar{\rho}(x)}$ funziona.

$\square$

Estensioni di funzione liscia

Def: $S \subseteq M$ varietà (sottoinsieme), $f : S \to N$ (varietà) funzione è LISCIA

se $\forall p \in S \ \exists \ U(p) \subseteq M$ (aperto), $f_p : U(p) \to N$ LISCIA

t.c. $f|_{S \cap U(p)} = f_p|_{S \cap U(p)}$

Prop $S \subseteq M$ chiuso. Ogni $f : S \to \mathbb{R}^n$ liscia si estende

a $F : M \to \mathbb{R}^n$ liscia

dim: $\forall p \in S \ \exists \ f_p : U(p) \to \mathbb{R}^n$ che estende f

$\{U(p)\}_{p \in S} \cup \{M \setminus S\}$ ric. di M

$\rightsquigarrow \{\rho_p\}_{p \in S} \cup \{\rho\}$ partizione di 1

$F : M \to \mathbb{R}^n$ LISCIA $\quad F(x) = \sum_{p \in S} \rho_p(x) f_p(x)$ funziona: ha senso

Se $x \in S$

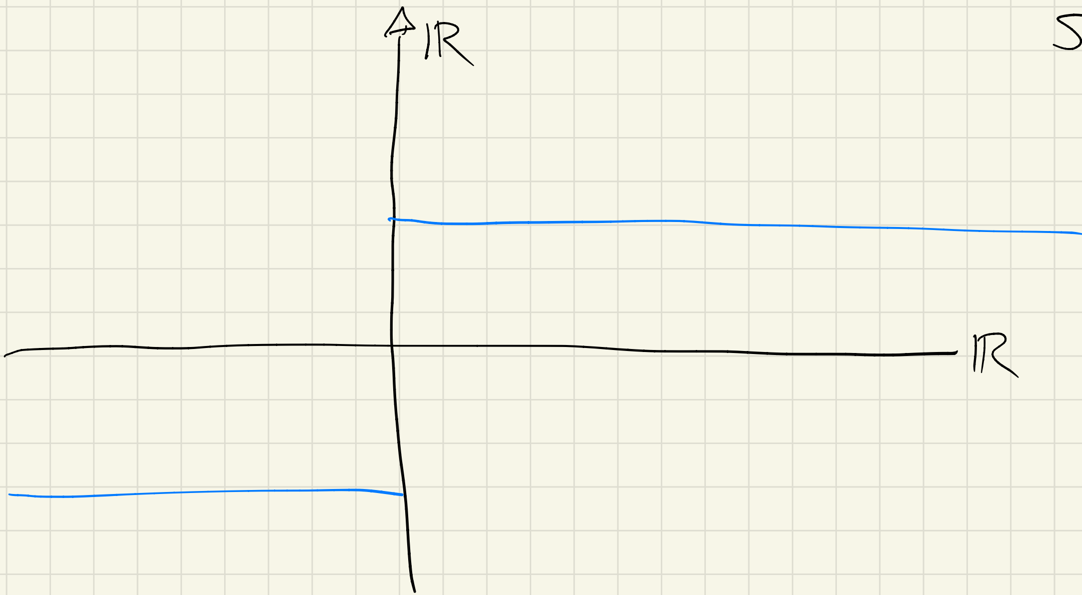
$F(x) = \sum \rho_p(x) f_p(x)$

$= \sum \rho_p(x) f(x)$

$= \underbrace{\left(\sum \rho_p(x)\right)}_{=1} f(x)$

$= f(x)$

$\square$



$S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Serve S chiuso

Serve $\mathbb{R}^n$

$f : S^1 \longrightarrow S^1$

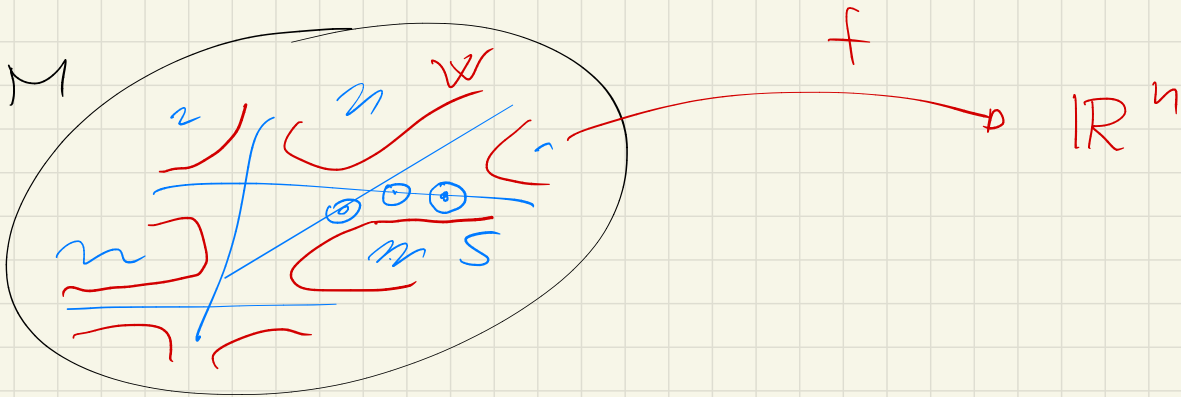
$f = id$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ S}}{S^1} \subseteq \underset{\substack{\shortparallel \\ M}}{D^2}$$

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

f non si estende a D^2

Oss: Posso chiedere che F sia nulla fuori da un intorno arbitrario W di S



$\forall x \in M \quad \|f(x) - g(x)\| = \left\| \sum_p \rho_p(x) f(x) - \sum \rho_p(x) g_p(x) \right\| =$

$$= \left\| \sum_p \rho_{p}(x) \left(f(x) - g_p(x) \right) \right\| \leq \sum_p \underset{\substack{\wedge \\ 1}}{\rho_{p}(x)} \, \underset{\substack{\wedge \\ \varepsilon(x)}}{\|f(x) - g_p(x)\|}$$

$$\leq \varepsilon(x)$$

<u>dim</u>: Localmente ce la faccio:

$\forall p \in M \quad \exists \quad U(p) \subseteq M \qquad U(p) \xrightarrow{g_p} \mathbb{R}^n$ LISCIA t.c

$$g|_{S \cap U} = f|_{S \cap U} \qquad \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon(x) \quad \forall x \in U(p)$$

2 casi:

a) Se $p \in S \quad \exists \, g_p : U(p) \to \mathbb{R}^n$ estensione liscia locale

b) Se $p \notin S \quad g_p : U(p) \to \mathbb{R}^n \qquad g_p(x) = f(p)$

$\{U(p)\}_{p \in M} \rightsquigarrow \{\rho_p\} \quad g(x) = \sum \rho_p^{(x)} g_p(x)$ BEN DEF LISCIA

$g|_S = f|_S$